УДК 517.5

НАИЛУЧШИЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, ИМЕЮЩИХ ПРОИЗВОДНУЮ В СМЫСЛЕ ВЕЙЛЯ

К. Тухлиев[1]

1 *kamaridin.t54@mail.ru*; Худжандский государственный университет им. Б. Гафурова

Найдены точные неравенства между наилучшими приближениями периодических дифференцируемых в смысле Вейля функций тригонометрическими многочленами и обобщённым модулем непрерывности m-го порядка.

Ключевые слова: производная в смысле Вейля, наилучшие приближения, функция Стеклова, модуль непрерывности m-го порядка.

Полученные в этой работе результаты связаны с определением дробной производной в смысле Вейля [1]. Пусть $L_2 := L_2[0,2\pi]$ – пространство суммируемых с квадратом по Лебегу вещественных 2π-периодических функций f. Рассмотрим для функции $f \in L_2$ с рядом Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\right),$$

производную порядка $\alpha \geq 0$ в смысле Вейля, определённую равенством

$$f^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha} \left\{a_k \cos\left(kx + \frac{\alpha\pi}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\alpha\pi}{2}\right)\right\}.$$

Всюду далее $\mathbb{N}, \mathbb{R}_+ := (0,+\infty)$, — множества соответственно всех натуральных и положительных действительных чисел. Через $L_2^{(\alpha)}$ ($\alpha \geq 0$, $L_2^{(0)} \equiv L_2$) обозначим множество функций $f \in L_2$, у которых существует производная в смысле Вейля $f^{(\alpha)} \in L_2$ $(\alpha \geq 0)$. Если $s_{n-1}(f^{(\alpha)}, x)$ $(\alpha \geq 0)$ – частичная сумма порядка n–1 ряда Фурье функции $f^{(\alpha)}$, то легко доказать, что наилучшее приближение функции $f^{(\alpha)} \in L_2$ тригонометрическими полиномами T_{n-1} степени не выше $n-1$ имеет вид

$$E_{n-1}(f^{(\alpha)}) = \inf\left\{\|f^{(\alpha)} - T_{n-1}\| : T_{n-1} \in \Im_{2n-1}\right\} = \|f^{(\alpha)} - s_{n-1}(f^{(\alpha)})\| = \left(\sum_{k=n}^{\infty} k^{2\alpha}\rho_k^2(f)\right)^{1/2},$$

где $\rho_k^2(f) = a_k^2(f) + b_k^2(f)$, $a_k(f)$, $b_k(f)$ — косинус- и синус-коэффициенты функции f. Пусть

$$\Omega_m(f;t) \stackrel{def}{=} \sup\left\{\left\|\Delta_h^m(f;\cdot)\right\| : \ 0 < h \leq t\right\}$$

функция, которую назовем *обобщённым модулем непрерывности m-го порядка* функции $f \in L_2$, определяемая через функции Стеклова (см., напр. [2]).

Всюду, далее полагаем

$$\operatorname{sinc} t := \left\{\frac{\sin t}{t}, \text{ если } t \neq 0, \ 1, \text{ если } t = 0\right\}.$$

Лемма. *Для произвольной функции* $f \in L_2^{(\alpha)}$ *имеет место следующее равенство*

$$\Omega_m^2(f^{(\alpha)}, t) = \sup\left\{\sum_{k=1}^{\infty} k^{2\alpha}\rho_k^2(f)\,(1-\operatorname{sinc} kh)^{2m}:\ |h|\le t\right\}.$$

Введём в рассмотрение экстремальную характеристику

$$\chi_{n,\alpha,p}(\Omega_m, q, h) = \sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)}\\ f\neq\text{const}}} E_{n-1}(f)\left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(\alpha)}, t)q(t)dt\right)^{-1/p},$$

где $m, n \in \mathbb{N}$, $\alpha \ge 0$, $p \in \mathbb{R}_+$, $0 < h \le \pi/n$, $q \ge 0$ — весовая функция на отрезке $[0, h]$.

С использованием леммы можно доказать следующее общее утверждение:

Теорема 1. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \ge 0$, $0 < p \le 2$, $0 < h \le \pi/n$, $n \in \mathbb{N}$, q *– весовая функция на отрезке* $[0, h]$. *Тогда справедливы неравенства*

$$\left\{A_{n,m,\alpha,p}(q,h)\right\}^{-1} \le \chi_{n,\alpha,p}(\Omega_m, q, h) \le \left\{\inf_{n\le k<\infty} A_{k,m,\alpha,p}(q,h)\right\}^{-1}, \tag{1}$$

где

$$A_{k,m,\alpha,p}(q,h) = \left(k^{\alpha p}\int_0^h (1-\operatorname{sinc} kt)^{mp}\, q(t)dt\right)^{1/p}, \quad k \ge n.$$

Возникает естественный вопрос: выяснить случаи или указать конкретные свойства весовых функций, для которых при всех $0 < h \le \pi/n$ имеет место равенство

$$\inf_{k\ge n}\mathscr{A}_{k,m,r,p}(\varphi, h) = \mathscr{A}_{n,m,r,p}(\varphi, h), \tag{2}$$

равносильное задаче о точности двустороннего неравенства (1).

Теорема 2. *Пусть* q *– весовая функция на отрезке* $[0, h]$ *(*$0 < h \le \pi/n$, $n \in \mathbb{N}$*) является дифференцируемой. Если при некотором* $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\alpha \ge 1$, $1/\alpha \le p \le 2$ *и любых* $t \in (0, h)$ *выполнено дифференциальное неравенство*

$$(\alpha p - 1)q(t) - tq'(t) \ge 0,$$

то справедливо соотношение (2) *и, следовательно,*

$$\chi_{n,\alpha,p}(\Omega_m, q, h) = \frac{1}{n^\alpha}\left(\int_0^h (1-\operatorname{sinc} nt)^{mp}\, q(t)dt\right)^{-1/p}.$$

Отметим, что ряд экстремальных задач теории аппроксимации, связанные с понятием дробной производной в смысле Вейля, ранее рассматривались в работах [3;4] и другими.

Литература

1. Weyl H. *Bemerkungen zum Begriff der differentialquotienten gebrochener Ordnung* // Vierteljahresschrift der Naturschenden Gesellschaft in Zurich. – 1917. – V. 62. – P. 296-302.

2. Шабозов М. Ш., Тухлиев К. *Наилучшие полиномиальные приближения и поперечники некоторых функциональных классов в L_2* // Матем. заметки. – 2013. – Т. 94. – № 6. – С. 905-914.

3. Тухлиев К. *Структурные характеристики функций из L_2 и точные значения поперечников некоторых классов функций* // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. – 2015. – № 1(158). – С. 7-19.

4. Шабозов М.Ш., Темурбекова С.Д. *Значения поперечников классов функций из $L_2[0,2\pi]$ и минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона* // Известия Тульского госуниверситета. Естественные науки. – 2012. – Вып.3. – С. 60-68.

THE BEST POLYNOMIAL APPROXIMATION OF PERIODIC FUNCTIONS
HAVING A DERIVATIVE IN THE SENSE OF WEYL

K. Tukhliev

Sharp inequalities between the best approximations of periodic, differentiable in the sense of Weil, functions by trigonometric polynomials and the generalized modulus of continuity of mth order were found.

Keywords: derivative in the Weyl sense, best approximation, Steklov function, modulus of continuity of mth order.

УДК 517.518.823

ОЦЕНКА НОРМЫ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО ОПЕРАТОРА ЭРМИТА-ФЕЙЕРА В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

А.И. Федотов[1]

1 *fedotov@mi.ru*; Московский социально-гуманитарный институт

Получены оценки норм интерполяционных операторов Эрмита-Фейера в одномерных в многомерных пространствах Соболева. Показано, что в одномерном случае норма этого оператора ограничена. В многомерном же случае величина нормы зависит от соотношения числа узлов по каждой координате.

Ключевые слова: интерполяционный оператор Эрмита-Фейера, пространства Соболева.

1. Одномерный случай

Будем, как обычно, обозначать через $\mathbb{N}$ множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0$ – множество натуральных чисел дополненных нулем, $\mathbb{Z}$ множество целых чисел, а $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел.

Зафиксируем $s \in \mathbb{R}$ и обозначим через H^s пространство Соболева порядка s, то есть замыкание всех 2π-периодических комплекснозначных функций одной пере-